Prijemni ispit iz matematike jun 2018.

1. Proveriti tačnost jednakosti

$$\left[\left(\frac{2}{x-y}-\frac{2x}{x^3+y^3}\cdot\frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}\right):\frac{4y^2}{x^2-2xy+y^2}\right]\cdot\frac{x+y}{x-y}=\frac{1}{2y}.$$

2. Rešiti jednačinu

$$\frac{3x}{x-1}-\frac{2x}{x+2}=\frac{3x-6}{(x-1)(x+2)}.$$

3. Rešiti jednačinu

$$64\cdot 9^x-84\cdot 12^x+27\cdot 16^x=0.$$

4. Rešiti jednačinu

$$\log_7(\log_5(\log_2 x))=0, \qquad x>0.$$

5. Dokazati identitet

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-2\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\sin^2\alpha=0.$$

Uputstvo.Npr. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)$

Prijemni ispit iz matematike Jun 2018. - Zaštita

1. Izračunati
$$\left(\frac{2^{-2}-3^{-2}}{2^{-1}-3^{-1}}\right)\cdot\left(2^{-1}-3^{-1}\right)^{-1}.$$

Uputstvo. $\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{9}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$.

2. Dokazati identitet
$$\frac{x^2}{xy+y^2}+\frac{y^2}{x^2+xy}-\frac{x^2+y^2}{xy}=-1.$$

Uputstvo. Npr. zbir prva dva razlomka je $\frac{x^3+y^3}{xy(x+y)}$ i primeni se zbir kubova.

3. Rešiti jednačinu
$$2^{x^2-2x+2}=\frac{1}{4}.$$

1. Ako je L dati izraz, tada

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{2}{x-y} - \frac{2x}{(x+y)(x-y)}\right) \cdot \frac{(x-y)^2}{4y^2} \cdot \frac{x+y}{x-y} \\ &= \frac{2x+2y-2x}{(x+y)(x-y)} \cdot \frac{(x-y)^2}{4y^2} \cdot \frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{2y}. \end{aligned}$$

2. Oslobadjanje od razlomaka daje

$$3x(x+2)-2x(x-1) = 3x-6, \quad 3x^2+6x-2x^2+2x-3x+6 = 0, \quad x^2+5x+6 = 0.$$

Rešavanje daje $x_1 = -3$, $x_2 = -2$. Polazna jednačina nema smisla za $x = -2$, tj. -2 nije u njenom domenu definisanosti. Jedino rešenje je $x = -3$.

3.

$$64 \cdot 3^{2x} - 84 \cdot 3^x \cdot 4^x + 27 \cdot 4^{2x} = 0,$$

smenom $u = 3^x$, $v = 4^x$ se dobija $64u^2 - 84uv + 27v^2 = 0$. Deljenje sa v^2 daje kvadratnu jednačinu. Radi lakseg računa, neka je $U = 4u = 4 \cdot 3^x$, $V = 3v = 3 \cdot 4^x$. Sada je

$$4U^2 - 7UV + 3V^2 = 0, \qquad 4\left(\frac{U}{V}\right)^2 - 7\frac{U}{V} + 3 = 0.$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{8} = \frac{7 \pm 1}{8}.$$

$$\frac{4 \cdot 3^x}{3 \cdot 4^x} = 1, \quad x_1 = 1; \qquad \frac{4 \cdot 3^x}{3 \cdot 4^x} = \frac{3}{4}, \quad x_2 = 2.$$

4. Prema definiciji logaritma važi $\log_5(\log_2 x) = 1$. Sada je $\log_2 x = 5$, tako da je $x = 2^5 = 32$.

5. Ako je I dati izraz, tada

$$\begin{aligned} I &= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) - 2\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \sin^2\alpha \\ &= \sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha - 2\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \sin^2\alpha \\ &= -\sin^4\alpha + \sin^2\alpha(1-\cos^2\alpha) = 0. \end{aligned}$$

1.

$$\left(\frac{2^{-2}-3^{-2}}{2^{-1}-3^{-1}}\right)\cdot\left(2^{-1}-3^{-1}\right)^{-1}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{9}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{9-4}{36}}{\frac{3-2}{6}}\cdot\frac{1}{\frac{3-2}{6}}=5.$$

2. Ako je L leva strana, tada

$$\begin{aligned} L &= \frac{x^2}{y(x+y)}+\frac{y^2}{x(x+y)}-\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{x^3+y^3}{xy(x+y)}-\frac{x^2+y^2}{xy} \\ &= \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{xy(x+y)}-\frac{x^2+y^2}{xy}=-1. \end{aligned}$$

3.

$$2^{x^2-2x+2}=2^{-2},\qquad x^2-2x+4=0,\qquad x_1=x_2=2.$$